УДК 517.9

А. А. Костиков

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассматривается краевая задача со старшими производными в условиях сопряжения. Доказана однозначная разрешимость этой задачи в пространствах Гельдера.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть Ω — заданная область в R^3 и $Q_T = \{(x, t) \in \Omega \subset R^3, t \in (0, T)\}$. Граница $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся компонент Γ^+ и Γ^-, причем Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^+. Пусть поверхность Γ делит Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$ так, что $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$. Обозначим $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ — некоторые координаты на Γ, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$, а через $Q_T^\pm$ обозначим области, на которые Γ_T разбивает цилиндр $Q_T = \Omega \times [0, T]$, при этом боковая поверхность $Q_T^\pm$ состоит из Γ_T и $\Gamma_T^\pm$.

Рассмотрим линейную задачу, состоящую в нахождении функций $u^+(x, t)$, $c(x, t)$, $u^-(x, t)$ и $\rho(\omega, t)$, определенных в $\overline{Q}_T^{\pm}$, $\overline{Q}_T$ и на Γ_T соответственно и удовлетворяющих соотношениям:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t} - a_{\pm}^2 \nabla^2 u^{\pm} = f_1^{\pm} \text{ в } Q_T^{\pm},$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \gamma \nabla^2 c = f_2 \text{ в } Q_T^{+},$$

$$u^{\pm}(x, t) = f_0^{\pm}(x, t) \text{ на } \Gamma_T^{\mp}, \tag{1}$$

$$c(x, t) = f(x, t) \text{ на } \Gamma_T^{+},$$

$$u^{\pm} + A^{\pm}(x, t)\rho + q(x, t)c = f_3^{\pm},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - k^-(x, t)\frac{\partial u^-}{\partial n} + k^+(x, t)\frac{\partial u^+}{\partial n} + d_1(x, t)\rho_{\omega_1} + d_2(x, t)\rho_{\omega_2} = f_4,$$

$$\mu(x, t)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha_2(x, t)\frac{\partial c}{\partial n} - g_1(x, t)\rho_{\omega_1} - g_2(x, t)\rho_{\omega_2} = f_5(x, t) \text{ на } \Gamma_T,$$

$$u^{\pm}(x, 0) = u_0^{\pm}(x),$$

$$\rho(\omega, 0) = \rho_0(\omega),$$

$$c(x, 0) = c_0(x).$$

Наша цель состоит в доказательстве разрешимости задачи (1) в анизотропных гельдеровских классах функций H^l, $H^{l,l/2}$, $\underset{0}{H}{}^{l,l/2}$, введенных в [4].

Будем предполагать, что $f_1^{\pm}(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $f_2(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^{+})$, $f_0^{\pm}(x, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T^{\pm})$, $f(x, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T^{+})$, $f_3^{\pm}(x, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $f_4(x, t)$, $f_5(x, t) \in H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $A^{\pm}$, $q \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $k^{\mp}$, d_1, d_2, μ, g_1, $g_2 \in H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $u_0^{\pm}(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, $c_0(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, $\rho_0(\omega) \in H^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\Gamma^{\pm} \in H^{2+\alpha}$, $\Gamma \in H^{3+\alpha}$, причем положительные функции $A^{\pm}(x, t)$, $k^{\pm}(x, t)$ и $\mu(x, t)$ отделены от нуля константой ε_0 и от бесконечности константой C. Предполагаются также выполненными следующие условия согласования:

$$u_0^{\pm}(x) = f_0^{\pm}(x, 0), \quad x \in \Gamma^{\pm},$$

$$c_0(x) = f(x, 0), \quad x \in \Gamma^{+},$$

$$u_0^{+}(x) + A^{+}(x, 0)\rho_0(\omega) + q(x, 0)c_0(x) = f_3^{+}(x, 0), \quad x \in \Gamma,$$

$$u_0^{-}(x) + A^{-}(x, 0)\rho_0(\omega) + q(x, 0)c_0(x) = f_3^{-}(x, 0), \quad x \in \Gamma,$$

$$a_{\pm}^2 \nabla^2 u_0^{\pm}(x) + f_1^{\pm}(x, 0) = \frac{\partial f_0^{\pm}}{\partial t}(x, 0), \quad x \in \Gamma^{\pm},$$

$$\gamma \nabla^2 c_0(x) + f_2(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0), \quad x \in \Gamma^{+}.$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\left.\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0} = u^{(1)\pm}(x) = a_{\pm}^2 \nabla^2 u_0^{\pm}(x) + f_1^{\pm}(x, 0),$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial t}\right|_{t=0} = c^{(1)}(x) = \gamma \nabla^2 c_0(x) + f_2(x, 0),$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{t=0} = \rho^{(1)}(\omega) = f_4(x, 0) + k^-(x, 0)\frac{\partial u_0^-(x)}{\partial n} -$$

$$- k^+(x, 0)\frac{\partial u_0^+(x)}{\partial n} - d_1(x, 0)\rho_{0\omega_1} - d_2(x, 0)\rho_{0\omega_2}, \quad x \in \Gamma.$$

С помощью этих обозначений остальные условия согласования запишем в виде

$$u^{(1)+}(x)+\frac{\partial A}{\partial t}(x,\ 0)\,\rho_0(\omega)+A^{+}(x,\ 0)\,\rho^{(1)}(\omega)+\frac{\partial q}{\partial t}(x,\ 0)\,c_0(x)+ \\ +q(x,\ 0)\,c^{(1)}(x)=\frac{\partial f_3^{+}}{\partial t},$$

$$u^{(1)-}(x)+\frac{\partial A}{\partial t}(x,\ 0)\,\rho_0(\omega)+A^{-}(x,\ 0)\,\rho^{(1)}(\omega)+\frac{\partial q}{\partial t}(x,\ 0)\,c_0(x)+ \\ +q(x,\ 0)\,c^{(1)}(x)=\frac{\partial f_3^{-}}{\partial t},$$

$$\mu(x,\ 0)\,\rho^{(1)}(\omega)+d_2(x,\ 0)\frac{\partial c_0(x)}{\partial n}-g_1(x,\ 0)\,\rho_{0\omega_1}-g_2(x,\ 0)\,\rho_{0\omega_2}=f_5(x,\ 0).$$

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для задачи (1) выполнены указанные условия. Тогда она имеет единственное решение $u^{\pm}(x,\ t)\in H^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $c(x,t)\in H^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $\rho(\omega,\ t)\in H^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ для любого $T>0$. Для решения этой задачи выполняется неравенство

$$|\rho|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}+|\rho_t|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}+|u^{+}|_{Q_T^{+}}^{(2+\alpha)}+|u^{-}|_{Q_T^{-}}^{(2+\alpha)}+|c|_{Q_T^{+}}^{(2+\alpha)}\leqslant \\ \leqslant M_0(|f_1^{+}|_{Q_T^{+}}^{(\alpha)}+|f_1^{-}|_{Q_T^{-}}^{(\alpha)}+|f_2|_{Q_T^{+}}^{(\alpha)}+|f_3^{+}|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}+|f_3^{-}|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}+|f_4|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}+ \\ +|f_5|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}+|f_0^{+}|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}+|f_0^{-}|_{\Gamma_T^{-}}^{(2+\alpha)}+|f|_{\Gamma_T^{+}}^{(2+\alpha)}+|u_0^{+}|_{\Omega^{+}}^{(2+\alpha)}+ \\ +|u_0^{-}|_{\Omega^{-}}^{(2+\alpha)}+|\rho_0|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}+|c_0|_{\Omega^{+}}^{(2+\alpha)}.$$

2. Модельная задача сопряжения. Доказательство теоремы 1 начнем с изучения модельной задачи, в которой требуется найти функции $u^{\pm}$, c и ρ по условиям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}-a_{\pm}^2\nabla^2u^{\pm}=f_1^{\pm}(x,\ t)\ \text{в}\ D_4^{\pm},\\ \frac{\partial c}{\partial t}-\gamma\Delta c=f_2(x,\ t)\ \text{в}\ D_4^{+},\\ u^{\pm}+A^{\pm}\rho+qc=f_3^{\pm}(x',\ t),\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}-k^{-}\frac{\partial u^{-}}{\partial x_3}+k^{+}\frac{\partial u^{+}}{\partial x_3}+d_1\rho_{x_1}+d_2\rho_{x_2}=f_4(x',\ t),\\ \mu\frac{\partial\rho}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial c}{\partial x_3}-g_1\rho_{x_1}-g_2\rho_{x_2}=f_5(x',\ t)\ \text{на}\ D_3,\ x'=(x_1,\ x_2).\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь $D_4^{\pm}=\{x\in R^3,\ \pm x_3>0,\ t>0\}$, $D_3=\{x\in R^3,\ x_3=0\}$, $D_i^{(T)}=D_i\times[0,\ T]$. Коэффициенты задачи — заданные положительные постоянные, правые части (2) — заданные финитные функции, причем

$$f_1^{\pm}(x,\ t)\in \overset{0}{H}{}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(D_4^{\pm(T)}),\quad f_2(x,\ t)\in \overset{0}{H}{}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(D_4^{+(T)}),$$

$$f_3^{\pm}(x',\ t)\in \overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D}_3^{(T)}),\quad f_4(x',\ t),\quad f_5(x',\ t)\in \overset{0}{H}{}^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D}_3^{(T)}).$$

Своеобразие рассматриваемой задачи в том, что в условиях сопряжения содержатся старшие производные неизвестных функций $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right.$ выражается через $\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$, $i=\overline{1,\ 3}$, что видно из третьего краевого условия и первого уравнения в (2)$\left.\right)$.

Теорема 2. Задача (2) однозначно разрешима в классах

$$u^{\pm}(x,\ t) \in \overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_4^{\pm(T)}),\quad \rho(x',\ t) \in \overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(D_3^{(T)}),\quad c(x,\ t) \in$$

$$\in \overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_4^{+(T)})$$

при любом $T > 0$. Для решения задачи выполняется неравенство

$$|u^+|_{D_4^{+(T)}}^{(2+\alpha)} + |u^-|_{D_4^{-(T)}}^{(2+\alpha)} + |c|_{D_4^{+(T)}}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)} + |\rho_t|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant M_0(|f_1^+|_{D_4^{+(T)}}^{(\alpha)} + |f_1^-|_{D_4^{-(T)}}^{(\alpha)} + |f_2|_{D_4^{+(T)}}^{(\alpha)} + |f_3^+|_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)} + |f_3^-|_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)} +$$

$$+ |f_4|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)}).$$

Доказательство. Будем пока считать, что $f_1^{\pm},\ f_2,\ f_3^{\pm} \equiv 0$. Сделаем в (2) преобразование Фурье по x_1, x_2 и преобразование Лапласа по t. Образы функций обозначим значком «$\sim$» сверху:

$$\tilde{\varphi}(\lambda,\ p) = F\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-pt}dt \int_{R\lambda} e^{-ix'\lambda}\varphi(x',\ t)\,dx',\quad x'\lambda = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2.$$

Обратное преобразование будем обозначать F^{-1}.

В результате получим следующую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x_3:

$$p\tilde{u}^{\pm} - a_{\pm}^2\frac{d^2\tilde{u}^{\pm}}{dx_3^2} + a_{\pm}^2\lambda^2\tilde{u}^{\pm} = 0,$$

$$p\tilde{c} - \gamma\frac{d^2\tilde{c}}{dx_3^2} + \gamma\lambda^2\tilde{c} = 0,$$

$$\tilde{u}^{\pm} + A^{\pm}\tilde{\rho} + q\tilde{c} = 0,$$

$$p\tilde{\rho} + k^+\frac{d\tilde{u}^+}{dx_3} - k^-\frac{d\tilde{u}^-}{dx_3} + i\lambda_1 d_1\tilde{\rho} + i\lambda_2 d_2\tilde{\rho} = \tilde{f}_4,$$

$$\mu p\tilde{\rho} + \alpha_2\frac{d\tilde{c}}{dx_3} - i\lambda_1 g_1\tilde{\rho} - i\lambda_2 g_2\tilde{\rho} = \tilde{f}_5.$$

Из первых трех уравнений следует, что

$$\tilde{u}^+ = B^+(\lambda,\ p)\exp\left(-\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}\,x_3\right),$$

$$\tilde{u}^- = B^-(\lambda,\ p)\exp\left(+\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\,x_3\right),$$

$$\tilde{c} = D(\lambda,\ p)\exp\left(-\sqrt{\frac{p + \gamma\lambda^2}{\gamma}}\,x_3\right).$$

Подставляя найденные значения $\tilde{u}^{\pm}$ и $\tilde{c}$ в последние четыре уравнения, для нахождения $B^{\pm}$, D и ρ получаем линейную систему:

$$B^+ + A^+\tilde{\rho} + qD = 0,$$

$$B^- + A^-\tilde{\rho} + qD = 0,$$

$$p\tilde{\rho} - k^+B^+\sqrt{(p + a_+^2\lambda^2)/a_+^2} + k^-B^-\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}} + i\lambda d\tilde{\rho} = \tilde{f}_4, \tag{3}$$

$$\mu p\tilde{\rho} - \alpha_2 D\sqrt{\frac{p + \gamma\lambda^2}{\gamma}} - i\lambda g\tilde{\rho} = \tilde{f}_5.$$

Из этой системы находим

$$\tilde{\rho}\left(p+\frac{\alpha_2 k^+ A^+ \sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M}+\frac{\alpha_2 k^- A^- \sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M}\times\right.$$

$$\times\sqrt{\frac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}+$$

$$\left.+i\lambda\frac{\alpha_2 d\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}-k^+qg\sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}-k^-qg\sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M}\right)=$$

$$=\frac{k^+q\sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}+k^-q\sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M}\tilde{f}_5+\frac{\alpha_2\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M}\tilde{f}_4. \qquad (4)$$

Здесь $\lambda g=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$, $\lambda d=\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2$, $M=\alpha_2\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}+k^+q\mu\times$ $\times\sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}+k^-q\mu\sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}$.

Нетрудно показать, что коэффициент при $\tilde{\rho}$ в (4) не обращается в нуль при $\operatorname{Re} p\geqslant x_0>0$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью обратных преобразований.

Обозначим

$$r_1=\frac{\alpha_2 d\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}-k^+qg\sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}-k^-qg\sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M},$$

$$r_2=\frac{\alpha_2 k^+A^+\sqrt{\dfrac{p+a_+^2\lambda^2}{a_+^2}}\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M},$$

$$r_3=\frac{\alpha_2 k^-A^-\sqrt{\dfrac{p+a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\sqrt{\dfrac{p+\gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M}.$$

Следуя [2], в представлениях для r_1, r_2 и r_3 выделим «главные члены», соответствующие $|\lambda|\to\infty$, т. е. представим их в виде

$$r_1=D_0+\tilde{G}_1(\lambda,\ p),\quad r_2=A_0+\tilde{G}_2(\lambda,\ p),$$

$$r_3=B_0+\tilde{G}_3(\lambda,\ p),$$

где

$$D_0=\frac{\alpha_2 d-qg\,(k^++k^-)}{\alpha_2+g\mu\,(k^++k^-)},$$

$$A_0=\frac{\alpha_2 k^+A^+}{\alpha_2+k^+q\mu+k^-q\mu},$$

$$B_0=\frac{\alpha_2 k^-A^-}{\alpha_2+k^+q\mu+k^-q\mu}.$$

Операторы $\tilde{G}_1(\lambda,\ p)$, $\tilde{G}_2(\lambda,\ p)$, $\tilde{G}_3(\lambda,\ p)$ имеют вид

$$\tilde{G}_1(\lambda,\ p)=D_1\tilde{K}_1(\lambda,\ p)+D_2\tilde{K}_2(\lambda,\ p),$$

$$\tilde{G}_2(\lambda, p) = B_1\tilde{K}_1(\lambda, p) + B_2\tilde{K}_2(\lambda, p),$$

$$\tilde{G}_3(\lambda, p) = A_1\tilde{K}_1(\lambda, p) + A_2\tilde{K}_2(\lambda, p).$$

Здесь

$$A_1 = \frac{\alpha_2 k^{+2} A^+ q\mu (a_+^2 - \gamma)}{a_+ \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2 k^+ k^- A^+ q\mu}{a_- \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))},$$

$$B_1 = \frac{\alpha_2 k^- k^+ A^- q\mu (a_+^2 - \gamma)}{a_+ \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))}, \quad B_2 = \frac{\alpha_2 k^{-2} A^- q\mu (a_-^2 - \gamma)}{a_- \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))},$$

$$D_1 = \frac{\alpha_2 q(\mu d + g) k^+ (a_+^2 - \gamma)}{a_+ \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))}, \quad D_2 = \frac{\alpha_2 q(\mu d + g) k^- (a_-^2 - \gamma)}{a_- \sqrt{\gamma}(\alpha_2 + q\mu(k^+ + k^-))},$$

$$\tilde{K}_1(\lambda, p) = \frac{p}{M(a_+\sqrt{p + \gamma\lambda^2} + \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{p + a_+^2\lambda^2}},$$

$$\tilde{K}_1(\lambda, p) = \frac{p}{M(a_-\sqrt{p + \gamma\lambda^2} + \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{p + a_-^2\lambda^2}}.$$

Подставляя в (4) выражения для r_1, r_2 и r_3, после некоторых преобразований получаем

$$\tilde{\rho}\Bigg(p + A_0\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_0\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}} + i\lambda D_0 +$$

$$+\left(i\lambda D_1 + A_1\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_1\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\right)\tilde{K}_1 +$$

$$+\left(i\lambda D_2 + A_2\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_2\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\right)\tilde{K}_2\Bigg) =$$

$$= \frac{k^+ q\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + k^- q\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M}\tilde{f}_5 + \frac{\alpha_2\sqrt{\frac{p + \gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M}\tilde{f}_4. \quad (5)$$

Обозначим $\tilde{R}(\lambda, p) = p + A_0\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_0\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}} + i\lambda D_0$, тогда из (5) следует

$$\tilde{\rho}\left(1 + \frac{\left(i\lambda D_1 + A_1\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_1\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\right)\tilde{K}_1}{\tilde{R}(\lambda, p)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(i\lambda D_2 + A_2\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_2\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\right)\tilde{K}_2}{\tilde{R}(\lambda, p)}\right) =$$

$$= \frac{k^+ q\sqrt{\frac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + k^- q\sqrt{\frac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{M\tilde{R}(\lambda, p)}\tilde{f}_5 + \frac{\alpha_2\sqrt{\frac{p + \gamma\lambda^2}{\gamma}}}{M\tilde{R}(\lambda, p)}\tilde{f}_4 \equiv$$

$$\equiv \tilde{F}_6(\lambda, p). \quad (6)$$

Будем обозначать через $\hat{H}^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ подпространство пространства $H^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ состоящее из функций $u(x, t)$, для которых конечна норма

$$|u|_{Q_T}^{[l+\alpha]} = |u|_{Q_T}^{(l+\alpha)} + |u_t|_{Q_T}^{(l-1+\alpha)}.$$

Рассмотрим операторы $\tilde{R}(\lambda, p)$, $M(\lambda, \rho)$ и $\tilde{F}(\lambda, p) = \sqrt{p + c_1\lambda^2} + \sqrt{p + c_2\lambda^2}$, где c_1, c_2 — положительные постоянные

Лемма 1. Оператор $\tilde{R}$ с символом $p + A_0\sqrt{\dfrac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_0\sqrt{\dfrac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}} + i\lambda D_0$ имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{R}^{-1} : H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}} \to \hat{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

Доказательство леммы содержится в работах [1, лемма 1; 3, лемма 1].

Лемма 2. Операторы $M(\lambda, p)$ с символом $\alpha_2\sqrt{\dfrac{p + \gamma\lambda^2}{\gamma}} + k^+q\mu \times \sqrt{\dfrac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + k^-q\mu\sqrt{\dfrac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}$ и $\tilde{F}(\lambda, p)$ с символом $\sqrt{p + c_1\lambda^2} + \sqrt{p + c_2\lambda^2}$ имеют ограниченные обратные операторы $M^{-1}(\lambda, p)$, $\tilde{F}^{-1}(\lambda, p)$: $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}} \to H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

Доказательство. Легко видеть, что $M^{-1}(\lambda, p)$ и $\tilde{F}^{-1}(\lambda, p)$ являются гладкими при $|p| + \lambda^2 \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$ ядрами, однородными в смысле $M^{-1}(\xi\lambda, \xi^2 p) = \xi^{-1}M^{-1}(\lambda, p)$, $\tilde{F}^{-1}(\lambda, p) = \xi^{-1}\tilde{E}^{-1}(\lambda, p)$. Следовательно, по теореме 2.2 работы [5] имеют место неравенства

$$\langle F^{-1}[M^{-1}Ff]\rangle_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant C\langle f\rangle_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)},$$

$$\langle F^{-1}[\tilde{F}^{-1}Ff]\rangle_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant c\langle f\rangle_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. Оператор L с символом $\sqrt{p + c_1\lambda^2}$, где $c_1 > 0$, является ограниченным оператором, действующим из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ в $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}$.

Доказательство леммы очевидно.

Для функции $F_6(x, t)$, введенной в (6), из лемм 1—3 следует оценка

$$|F_6|_{D_3^{(T)}}^{[2+\alpha]} \leqslant C(|f_4|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)}).$$

Рассмотрим оператор E_1 с символом

$$\frac{i\lambda D_1 + A_1\sqrt{\dfrac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_1\sqrt{\dfrac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}}{\tilde{R}(\lambda, p)\cdot M\cdot(a_+\sqrt{p + \gamma\lambda^2} + \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{p + a_+^2\lambda^2}}.$$

Так как оператор дифференцирования по t (с символом p) ограничен из $\hat{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ в $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}$, то из лемм 1—3 следует, что E_1 вполне непрерывен в $\hat{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$. Аналогичное утверждение верно и для оператора E_2 с символом

$$\frac{\left(i\lambda D_2 + A_2\sqrt{\dfrac{p + a_+^2\lambda^2}{a_+^2}} + B_2\sqrt{\dfrac{p + a_-^2\lambda^2}{a_-^2}}\right)p}{\tilde{R}(\lambda, p)\cdot M\cdot(a_-\sqrt{p + \gamma\lambda^2} + \sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{p + a_-^2\lambda^2}}.$$

Из единственности решения задачи (2) следует существование ограниченного в $\hat{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ оператора $(I + E_1 + E_2)^{-1}$. Таким образом, имеет место оценка

$$|\rho|_{D_3^{(T)}}^{[2+\alpha]} \leqslant C_1 |F_6|_{D_3^{(T)}}^{[2+\alpha]} \leqslant C_2 (|f_4|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)}).$$

Из системы (2) видно, что $u^{\pm}(x, t)$ и $c(x, t)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t} - a_{\pm}^2 \nabla^2 u^{\pm} = f_1^{\pm}(x, t),$$

$$u^{\pm}|_{x_3=0} = f_3^{\pm}(x', t) - A^{\pm}\rho - qc$$

и

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \gamma \nabla^2 c = f_2(x, t),$$

$$\alpha_2 \frac{\partial c}{\partial x_3}\Big|_{x_3-0} = f_5(x', t) - \mu \frac{\partial \rho}{\partial t} + g_1 \rho_{x_1} + g_2 \rho_{x_2}.$$

Отсюда следует, что $u^{\pm}(x, t) \in \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_4^{\pm(T)})$, $c(x, t) \in \underset{0}{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_4^{+(T)})$ и справедливы неравенства

$$|u^{\pm}|_{D_4^{\pm(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_1 (|f_4|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)}),$$

$$|c|_{D_4^{+(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_2 (|f_4|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)} + |f_5|_{D_3^{(T)}}^{(1+\alpha)}).$$

Задача (2) с ненулевыми $f_1^{\pm}(x, t)$, $f_2(x, t)$, $f_3^{\pm}(x', t)$ сводится к задаче с нулевыми $f_1^{\pm}(x, t)$, $f_2(x, t)$, $f_3^{\pm}(x', t)$ посредством замены $u^{\pm} = \bar{u}^{\pm} + v^{\pm}$, $c = \bar{c} + c_1$, где функции $v^{\pm}$ и c_1 есть решения задач

$$\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t} - a_{\pm}^2 \nabla^2 v^{\pm} = f_1^{\pm}, \quad v^{\pm}|_{x_3=0} = f_3^{\pm}, \quad v^{\pm}(x, 0) = 0$$

и

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \gamma \nabla^2 c_1 = f_2, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = 0, \quad c_1(x, 0) = 0,$$

для которых (см. [4]) справедливы оценки

$$|v^{\pm}|_{D_4^{\pm(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_1 (|f_1^{\pm}|_{D_4^{\pm(T)}}^{(\alpha)} + |f_3^{\pm}|_{D_3^{(T)}}^{(2+\alpha)}),$$

$$|c_1|_{D_4^{+(T)}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_2 (|f_2|^{(\alpha)}).$$

Теорема 2 доказана.

3. Исследование линейной задачи. Прежде всего сведем (1) к задаче, данные которой согласованы с нулем при $t = 0$. Для этого введем функции $v^{\pm}(x, t)$, $\sigma(\omega, t)$ и $s(x, t)$, определенные в $Q_T^{\pm}$, Γ_T и $Q_T^{\pm}$ соответственно, и такие, что

$$v^{\pm}(x, 0) = u_0^{\pm}(x), \quad \frac{\partial v^{\pm}(x, 0)}{\partial t} = u^{(1)\pm}(x),$$

$$s(x, 0) = c_0(x), \quad \frac{\partial s}{\partial t} = c^{(1)}(x),$$

$$\sigma(\omega, 0) = \rho_0(\omega), \quad \sigma_t(\omega, 0) = \rho^{(1)}(\omega),$$

$$|\sigma|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |\sigma_t|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + |v^{\pm}|_{Q_T^{\pm}}^{(2+\alpha)} + |s|_{Q_T^{\pm}}^{(2+\alpha)} \leqslant C (|u_0^{\pm}|_{\Omega^{\pm}}^{(2+\alpha)} + |\rho_0|_{\Gamma}^{(2+\alpha)} +$$

$$+ |f_1^{\pm}(x, 0)|_{\Omega^{\pm}}^{(\alpha)} + |f_2(x, 0)|_{\Omega^{+}}^{(\alpha)} + |f_4(x, 0)|_{\Gamma}^{(2+\alpha)}).$$

Метод построения таких функций описан в [4, гл. IV].

В силу условий согласования задача (1) сводится заменой $u^{\pm} = \tilde{u}^{\pm} + v^{\pm}$, $c = \tilde{c} + s$, $\rho = \tilde{\rho} + \sigma$ к задаче в пространствах $\underset{0}{H}^{l, \frac{l}{2}}$. В этих же пространствах ищем решение

$$u^{\pm}(x,\ t)\in \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^{\pm}),\ \rho(\omega,\ t)\in \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma),\ c(x,\ t)\in \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^{+}).$$

Для доказательства разрешимости задачи (1) применим метод, изложенный в [4, гл. IV]. Введем обозначения ($\tau > 0$):

$$K \equiv \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{+}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{-}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{+}) \times \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T),$$

$$B \equiv \underset{0}{H}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{+}) \times \underset{0}{H}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{-}) \times \underset{0}{H}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_\tau^{+}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_\tau^{+}) \times$$

$$\times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_\tau^{-}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_\tau) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\ \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_\tau) \times \underset{0}{H}^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}} \times$$

$$\times \underset{0}{H}^{1+\alpha,\ \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_\tau).$$

Обозначим k — элемент пространства K, $k = (u^{+},\ u^{-},\ c,\ \rho) \in K$, β — элемент пространства B, $\beta = (f_1^{+}, f_1^{-}, f_2, f_0^{+}, f_0^{-}, f, f_3^{+}, f_3^{-}, f_4, f_5)$, A — линейный оператор, определенный на пространстве K, который каждому набору $k \in K$ ставит в соответствие набор $\beta \in B$, получающийся из k по формулам (1).

Далее строится ограниченный оператор R, действующий из B в K. Способ построения этого оператора указан в [4, гл. IV]. Почти дословное повторение рассуждений [4, гл. IV, § 7] показывает, что $AR\beta = \beta + T\beta$, $RAk = k + Wk$, где T и W — ограниченные операторы в пространствах B и K соответственно, нормы которых малы, если τ достаточно мало. Отсюда вытекает, что A имеет ограниченный обратный $A^{-1} = R(I + T)^{-1} = (I + W)^{-1}R$, если τ достаточно мало. Рассматривая $\frac{\tau}{2}$ как начальный момент времени, получаем однозначную разрешимость (1) на интервале $\left[0,\ \frac{3}{2}\tau\right]$ и т. д.

Теорема 1 доказана.

1. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 11.— С. 3—7.
2. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О разрешимости многомерной задачи фильтрации со свободной границей.— Донецк, 1989.— 49 с.— Препр./ АН УССР, Ин-т прикл. математики и механики, № 89. 37).
3. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— 132 (74), № 1.— С. 3—19.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Могилевский И. Ш., Солонников В. А.* Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гельдеровских классах функций (случай полупространства) // Z. Anal. Anw.— 1989.— № 4.— С. 299—347.

Ин-т прикл. математики и
механики АН Украины, Донецк

Получено 15.10.90